# Astigmatismus bei der astronomischen Strahlenbrechung.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE,

DER

**PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT**

DER

**ROSTOCKER UNIVERSITÄT**

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

**Friedrich Dobe**
aus Berlin.

**Gräfenhainichen** (Bez. Halle)
Druck von C. Schulze & Co., G. m. b. H.
1911.

Referent:

Professor Dr. Weber.

Herrn Regierungsrat

Dr. Alexander Gleichen

in Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553620_0130

# Inhalt.


I. Kapitel. Allgemeines.

§ 1. Einleitung . . . . . 7
§ 2. Definition des Astigmatismus . . . . . 8
§ 3. Seine Bedeutung für die Astronomie . . . . . 10

II. Kapitel. Astigmatische Strahlenbrechung in einer homogenen (Keplerschen) Atmosphäre.

§ 4. Ableitung der Formeln. Zählweise . . . . . 12
§ 5. Resultate . . . . . 15

III. Kapitel. Die Atmosphäre als geschichtetes Medium nach der Simpsonschen Refraktionstheorie mit einer endlichen Anzahl endlicher Schichtungen.

§ 6. Die Simpsonsche Refraktionstheorie . . . . . 16
§ 7. Verallgemeinerte Ableitung der Eulerschen Konstanten. Bestimmungsstücke des Systems. Formeln . . . . . 17
§ 8. Trigonometrische Durchrechnung zweier Bündel. Resultate 20

IV. Kapitel. Die Atmosphäre als Medium mit unendlich vielen, unendlich dünnen Schichten.

§ 9. Kurze Ableitung und Besprechung des Gleichenschen Integrals . . . . . 26
§ 10. Darstellung seiner Anwendung . . . . . 31
§ 11. Umformung des Integrals nach der Simpsonschen Refraktionstheorie und Lösung durch eine Quadratur . . 32
§ 12. Anhang zur Lösung des Integrals . . . . . 34

V. Kapitel. Die Resultate bezogen auf das astronomische Fernrohr.

§ 13. Herleitung der Formel . . . . . 37
§ 14. Tabellen der Resultate. Kritik . . . . . 41

Nachweis der benutzten Werke . . . . . 45

## I. Kapitel.

# Einleitung. Allgemeines. Resultate.

### § 1.

Die Astronomie arbeitet, besonders bei Positionsbestimmungen der Sterne, beständig mit dem Begriff der sogenannten astronomischen Refraktion, d. h. mit der scheinbaren Ortsveränderung der Gestirne infolge der Strahlenbrechung in der irdischen Atmosphäre. Um diese festzustellen, bedarf es jedoch nur der Prüfung des Verhaltens eines einzigen Strahles. Streng genommen dringt nun aber ein ganzes Bündel von Strahlen durch die Atmosphäre in das zur Beobachtung dienende Instrument. Derartige Bündel sind bisher nur untersucht worden in der Anwendung auf photometrische Erscheinungen, indem man entweder die Beleuchtung des Mondes bei Mondfinsternissen[1]) hierdurch festzustellen bemüht war, oder indem man die Änderungen der Laplaceschen Extinktionsformel infolge der Bündeldeformationen festgestellt hat[2]).

Wenn nun die messende Astronomie auf die Bildfehler, die natürlich hier, wie bei jeder Brechung auftreten, bisher keine Rücksicht genommen hat, so geschah dies wohl in der stillschweigenden Voraussetzung, daß die Meßresultate durch die betreffenden dioptrischen Fehler nicht beeinträchtigt werden. Es fehlt jedoch nach dieser Richtung

---

[1]) Seeliger, Über die Beleuchtung des Mondes bei Mondfinsternissen; Abh. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wissensch. 1899; und Petzold, Brechung des Lichtes durch die Atmosphäre, Arch. f. Opt. Bd. 1.

[2]) Gleichen, Verh. d. deutsch. physikal. Ges. II. Jhrg. 2 und ders. ebenda, II, Nr. 16; 1900.

bisher an einer genaueren Kenntnis der betreffenden Fehlergrößen.

Deshalb soll in der vorliegenden Arbeit der Versuch gemacht werden, den Einfluß der astigmatischen Deformationen eines in der Atmosphäre gebrochenen Strahlenbündels auf die Genauigkeit der astronomischen Messungen numerisch festzustellen. Allerdings hat es Gleichen bereits unternommen, das Verhalten eines, die Atmosphäre durchdringenden Bündels zu untersuchen, indem er ein Integral herleitet[1]), das den Astigmatismus in konzentrisch geschichteten Medien bestimmt; allein zu rechnerischen Resultaten ist er nicht gekommen.

Diese Lücke soll im folgenden ausgefüllt werden. Es hat sich dabei gezeigt, daß die aus dem Gleichenschen Integral folgende Werte im wesentlichen übereinstimmen mit Werten, die man aus vereinfachenden Annahmen erhält. Diese bestehen darin, daß man einmal die Atmosphäre in eine endliche Zahl endlicher brechender Schichten zerlegen kann; und ferner, daß man sogar die einfache Annahme einer homogenen Keplerschen Atmosphäre machen kann. Aus methodischen Rücksichten sollen nun im folgenden diese drei Fälle in der Reihenfolge behandelt werden, daß zunächst von der Keplerschen Anschauung in bezug auf das Wesen der Atmosphäre ausgegangen wird. Sodann soll die Frage unter Voraussetzung der endlichen Schichtungen, und schließlich das Gleichensche Integral behandelt werden.

## § 2.

Die bekannte Anomalie bei der dioptrischen Abbildung, die man als Astigmatismus bezeichnet, ist definiert für dünne Bündel, und läßt eine exakte Definition überhaupt nur zu für unendlich dünne Bündel. Man versteht darunter die Erscheinung, daß das von einem Punkt innerhalb eines

[1]) Gleichen, Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre, Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, X. Heft, 3/4.

unendlich kleinen Raumwinkels ausgehende Licht nicht wieder in einen einzigen Punkt konzentriert wird, sondern Veranlassung zur Bildung zweier Bildpunkte gibt. Die Form des gebrochenen Bündels wird in erster Annäherung bekanntlich durch das sogenannte Sturmsche Konoid gegeben. Zwar hat Gullstrand[1]) gezeigt, daß das letztere die Verhältnisse nicht streng darstellt, allein es dürfte für die Zwecke dieser Rechnungen genügen, von dieser Vorstellung auszugehen, da auch alle anderen hier zugrundeliegenden theoretischen Betrachtungen der Atmosphäre auf vereinfachenden Annahmen beruhen, die der höchst komplizierten Wirklichkeit nur möglichst nahezukommen suchen. Unter Voraussetzung nur sphärischer brechender Flächen kann man sich die Eigenschaften eines astigmatischen Bündels wie folgt veranschaulichen. Aus jedem Bündel lassen sich zwei Paare von Strahlen so auswählen, daß das eine Paar die Fläche in einem Meridian trifft, weshalb man es das Meridionalpaar nennt; während das andere Paar, das Sagittalpaar, an derselben Stelle zwar, aber senkrecht zum ersten, in einem Parallelkreis auf die Fläche stößt. Beide Büschel lassen sich durch Drehung um ihre gemeinsame Achse nicht ineinander überführen. Daher fallen auch die beiden Bildpunkte nicht zusammen, sondern sind, obwohl auf der gemeinsamen Büschelachse liegend, eine kleine Strecke voneinander entfernt. Diese Strecke nennt man die astigmatische Differenz. Sie kann, wenn ihre Größe ein bestimmtes Maß überschreitet, die dioptrische Abbildung undeutlich, ja gänzlich unbrauchbar machen. Beide Strahlenbüschel vereinigen sich nun nicht eigentlich in Brennpunkten, sondern in Brennlinien, die aufeinander senkrecht stehen; und zwar so, daß die sagittale Brennlinie im Meridionalschnitt liegt und umgekehrt. Zwischen beiden Brennlinien beschreiben die Strahlen eine doppelkegelartige krumme Fläche, die unter dem Namen Sturm-

---

[1]) Skandinav. Arch. f. Physiologie 2, 1891; Nov. act. Reg. soc. Upsal. Ser. III, XX, 1901; Archiv für Optik, Band I.

sches Konoid in der Literatur bekannt ist, und die dadurch charakterisiert ist, daß Schnitte mit achsensenkrechten Ebenen in erster Annäherung Ellipsen ergeben, die nach den beiden Brennlinien hin abflachen, bis sie daselbst zu einer Linie degenerieren. Da nun jede Brennlinie die Richtung der großen Achse der ihr näher liegenden Ellipsen bestimmt, so folgt, daß irgendwo zwischen den beiden Brennlinien ein achsensenkrechter Schnitt einen Kreis ergeben muß, den man den Kreis kleinster Verwirrung nennt, und der gewöhnlich in Ermangelung eines gemeinsamen Bildpunktes als solcher gewählt wird.

§ 3.

Die solchermaßen erfolgte Feststellung des Astigmatismus ist für die beobachtende Astronomie von Wichtigkeit, denn sie zeigt, daß die Vergrößerung der Fernrohre und damit die Genauigkeit der Messungen nur bis zu einem bestimmten Grade getrieben werden kann, der durch kein Mittel zu überschreiten ist. Das astigmatische Bündel bildet nämlich, wenn es in ein Fernrohr tritt, in diesem ein neues Bündel, dessen Kreis kleinster Verwirrung vom menschlichen Auge durch das Okular betrachtet wird. Genau kann nun eine vorzunehmende Messung nur solange sein, als dieser Kreis dem Auge als Punkt, d. h. unter einem Winkel, der kleiner ist als der physiologische Grenzwinkel, erscheint. Da dieser Winkel sowohl von der Öffnung als auch von der Vergrößerung des Fernrohres abhängt, so sind unten Tabellen berechnet worden, die seine Größe für eine von 10 bis 100 cm fortschreitende Öffnung und eine von 100 bis 1000 fortschreitende Vergrößerung angeben, und zwar für scheinbare Zenitdistanzen von $90^0$ bis $60^0$, fortschreitend von $5^0$ zu $5^0$. Sie zeigen, daß der Astigmatismus in der Nähe des Horizontes nur sehr geringe Vergrößerungen und Fernrohröffnungen zuläßt, daß er aber mit steigender Höhe sehr rasch abnimmt. Aus einer dabeistehenden Tabelle läßt sich außerdem durch Einführung der entsprechenden Daten in

eine Formel leicht die Größe des Astigmatismus für jedes Fernrohr bestimmen. Ferner wurde eine ähnliche Tabelle berechnet, die angibt, bis zu welcher Vergrößerung man mit einem Fernrohr von gegebener Öffnung bei bestimmter scheinbarer Zenitdistanz gehen darf, ohne daß die Beobachtungen ungenau werden. Sie zeigt, daß man jene nur ganz in der Nähe des Horizontes einzuschränken braucht, hier allerdings in nicht unwesentlichem Maße.

II. Kapitel.

## Astigmatische Strahlenbrechung in einer homogenen Atmosphäre.

§ 4.

Die Annahme einer Atmosphäre, deren Dichtigkeit überall gleich ist, wurde von Kepler bei seinen Rechnungen gemacht. Sie verdient es darum, auch hier als Ausgangspunkt benutzt zu werden, jedoch mit einer Einschränkung in bezug auf ihre Höhe. Diese soll so bestimmt sein, daß die sich hier ergebende Horizontalrefraktion gleich der wirklichen sei. Alsdann zeigt eine leichte Rechnung, daß auch die übrigen Refraktionen den wahren sehr nahe kommen.

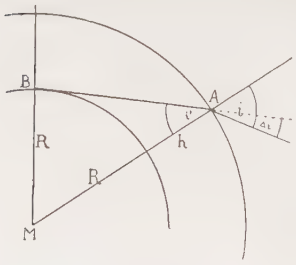

Fig. 1.

Die Höhe h der Atmosphäre ist wie folgt zu berechnen. Es sei (Fig. 1) B der Standpunkt des Beschauers, in dessen Auge ein bei A in die Atmosphäre eintretender Strahl gelangt. Der Erdradius MB sei R, der Einfallswinkel i, der Brechungswinkel i'; dann ist $i - i' = \Delta i$ die Refraktion. Daraus folgt

$$i = i' + \Delta i \quad \text{und}$$

$$\sin i = \sin i' \cos \Delta i + \cos i' \sin \Delta i. \tag{1}$$

Ferner ist, wenn der Brechungsexponent des leeren Raumes $n = 1$ und der der Luft $n' = 1{,}00029$ ist, nach dem Brechungsgesetz

$$\sin i = n' \sin i'. \tag{2}$$

Diese Gleichung in (1) eingesetzt, ergibt

$$n' \sin i' = \sin i' \cos \Delta i + \cos i' \sin \Delta i$$

$$n' = \cos \Delta i + \operatorname{ctg} i' \sin \Delta i. \tag{3}$$

Nun kann man aus Fig. 1 ablesen

$$\operatorname{ctg} i' = \sqrt{\frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2}},$$

weswegen Gl. (3) wird

$$n' = \cos \Delta i + \sin \Delta i \cdot \sqrt{\frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2}},$$

was man leicht in die quadratische Gleichung umformen kann

$$h^2 + 2Rh = R^2 \frac{(n' - \cos \Delta i)^2}{\sin^2 \Delta i},$$

die aufgelöst ergibt

$$h = R\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{(n' - \cos \Delta i)^2}{\sin^2 \Delta i}}\right) \tag{4}$$

Um nun das System vollständig zu bestimmen, müssen wir für sämtliche in Frage kommenden Zenitdistanzen noch die i' berechnen, während man die $\Delta i$ aus den Refraktionstafeln entnehmen kann. Für die i' ergibt sich aus Fig. 1 sogleich

$$\sin i' = \frac{R}{R+h} \sin z, \tag{5}$$

wo z die scheinbare Zenitdistanz ist.

Für die Durchrechnung muß nunmehr die Zählweise festgesetzt werden, und zwar sei die Abbesche gewählt, die die Richtungen vom Punkte der Brechung an als positiv zählt, gleichzeitig nach links und rechts. Der einfallende Strahl muß deswegen mit negativem Vorzeichen in Rechnung gesetzt werden, und eine positiv sich ergebende Schnittweite ist in Richtung des fortschreitenden Lichtes zu wählen. Diese Zählweise sei für diese Untersuchung ein für allemal festgesetzt.

Dann lautet die Formel der geometrischen Optik für die meridionale Schnittweite t'

$$(6) \qquad \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r},$$

wo r der Radius der brechenden Fläche, also gleich $R + h$, und positiv zu rechnen ist, da jene dem ankommenden Licht ihre konvexe Seite zuwendet. Da jedoch das von dem hier als unendlich fern zu betrachtenden Stern kommende Licht als parallel anzusehen ist, so wird

$$t = \infty$$

und das zweite Glied von Gl. (6) verschwindet. Diese lautet also nunmehr

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r},$$

woraus folgt

$$t' = \frac{r\, n' \cos^2 i'}{n' \cos i' - n \cos i}.$$

Erweitert man dies mit $\sin i'$, führt das Brechungsgesetz ein und bedenkt, daß $n = 1$ ist, so ergibt sich

$$t' = \frac{r\, n' \cos^2 i' \sin i'}{\sin i \cos i' - \cos i \sin i'},$$

oder, da $\sin (i - i') = \sin \triangle i$, gleich dem Sinus der Refraktion ist,

$$(7) \qquad t' = \frac{r\, n' \cos^2 i' \sin i'}{\sin \triangle i}.$$

Auf der rechten Seite dieses Ausdrucks sind alle Größen positiv, infolgedessen ergibt sich auch t' als positiv, d. h. im Sinne der Lichtbewegung.

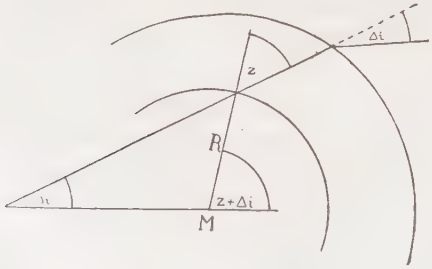


Fig. 2.

Der sagittale Bildpunkt liegt nach einem weiteren Lehrsatz der geometrischen Optik[1]) dort, wo eine durch den Mittelpunkt M des brechenden Mediums zum eintretenden Strahl gezogene Parallele den gebrochenen

[1]) Gleichen, Lehrbuch der geometr. Optik. Leipzig 1902, S. 158 ff.

Strahl schneidet. Man kannn demnach aus Fig. 2 sogleich ablesen

$$s' = \frac{R \sin (z + \triangle i)}{\sin \triangle i}$$

oder wegen der Kleinheit von $\triangle i$

$$s' = \frac{R \sin z}{\triangle i}. \tag{8}$$

Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß t' vom Punkte A der Brechung, s' dagegen vom Beschauer aus gerechnet ist. In der folgenden Tabelle ist deshalb von t' die Entfernung AB, die sogenannte Pfeilhöhe, abgezogen. Auch s' ergibt sich stets positiv, so daß beide Bildpunkte reell sind.

## § 5.

## Resultate.

1. Die nach Gl. (4) berechnete Höhe dieser (Keplerschen) Atmosphäre ergibt sich zu

$$h = 3{,}57 \text{ km}.$$

2. Die nach Gl. (7) und (8) berechneten Schnittweiten enthält folgende Tabelle, und zwar in Kilometern hinter dem Beschauer, von ihm ab gerechnet:

| Scheinb. Zenitdistanz z | Meridionale Schnittweite t' | Sagittale Schnittweite s' |
|---|---|---|
| 90° | 496 | 627 470 |
| 85° | 17 500 | 2 230 000 |
| 80° | 121 000 | 4 100 000 |
| 75° | 387 000 | 6 000 000 |
| 70° | 889 000 | 7 900 000 |
| 65° | 1 664 000 | 9 682 000 |
| 60° | 2 745 000 | 11 380 000 |

III. Kapitel.

# Die Atmosphäre als geschichtetes Medium nach der Simpsonschen Refraktionstheorie mit einer endlichen Anzahl endlicher Schichtungen.

## § 6.

Der Wirklichkeit um vieles näher kommend als die Voraussetzung des zweiten Kapitels ist die Annahme, die Atmosphäre bestehe aus einer bestimmten Anzahl endlicher Kugelschalen, deren Dichtigkeit und damit auch ihr Brechungsexponent nach oben beständig abnimmt. Ihre Grenze nach oben ist dann dort, wo optische Erscheinungen in ihr für uns merkbar zu werden aufhören. Der Zusammenhang zwischen Dichtigkeit und Brechungsexponent ist nun durch die verschiedenen Refraktionstheorien gegeben, von denen Bruhns[1]) eine vollständige Zusammenstellung gibt. Es sei hier die Simpsonsche Theorie gewählt[2]), da sie die übersichtlichsten Formeln gibt.

Nach ihr ist der Zusammenhang zwischen Höhe r über dem Erdmittelpunkt, Brechungsexponent n und Dichtigkeit der Atmosphäre $\varrho$ folgender:

$$\frac{R + h - r}{h} = \frac{n^2 - 1}{n^2_0 - 1} = \frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{1}$$

wobei R der Erdradius und h die Höhe der Atmosphäre ist, während der Index o die Beziehung auf den Erdboden angibt.

---

[1]) Die astronomische Strahlenbrechung. Leipzig 1861.

[2]) Bruhns, l. c. S. 88 ff.

Es werde nun die Dichte der Luft unter Normalbarometerstand gleich 1 gesetzt und die Atmosphäre in zehn konzentrische Kugelschalen geteilt, die dadurch gekennzeichnet sind, daß, wenn die Dichtigkeit in der untersten Schicht $\varrho_0 = 1$ ist, sie in der folgenden $\varrho_1 = 0{,}9$, in der dritten $\varrho_2 = 0{,}8$ usw. bis zur zehnten, wo sie $\varrho_9 = 0{,}1$ ist. Im luftleeren Raum ist alsdann $\varrho_{10} = 0$. Die Gesamthöhe der Atmosphäre sei gleichfalls der Simpsonschen Theorie zu

$$h = 10{,}575 \text{ km}$$

entnommen.

Für die trigonometrische Durchrechnung ist es nötig, die zu jeder Kugelschale gehörigen Brechungsexponenten $n_\lambda$, ihre Radien $r_\lambda$, sowie die Ein- und Austrittswinkel jedes Strahles für jede Höhe aus Gl. (1) zu bestimmen. Außerdem ist die Kenntnis der Schnittlängen d jedes Strahles innerhalb der einzelnen Schichten vonnöten.

Der Brechungsexponent n ist nach Gl. (1) gegeben durch

$$\frac{n^2_\lambda - 1}{n^2_0 - 1} = \varrho_\lambda,$$

da $\varrho_0 = 1$ ist. Also

$$n_\lambda = \sqrt{1 + \varrho\,(n^2_0 - 1)}, \quad \text{wo } n_0 = 1{,}00029 \text{ ist.} \tag{2}$$

Für die vom Erdmittelpunkt an gerechneten Höhen $r_\lambda$ (die zugleich Radien der Kugelschalen sind) ergibt sich

$$\frac{R + h - r_\lambda}{h} = \varrho_\lambda$$

$$r_\lambda = R + h(1 - \varrho_\lambda). \tag{3}$$

## § 7.

## Verallgemeinerte Ableitung der Eulerschen Konstanten.

Die Ein- und Austrittswinkel eines Strahles nach jeder Brechung sind durch folgenden Zusammenhang gegeben.

Nach einem von Euler hergeleiteten Satze ist längs eines die Atmosphäre durchfahrenden Strahles das Produkt aus der Entfernung vom Erdmittelpunkt, dem Brechungsexponenten und dem Sinus des Einfallwinkels konstant. Es soll nun nachgewiesen werden, daß dies Gesetz auch für eine aus endlichen Schichten bestehende Atmosphäre gilt.

Wieder sei in Fig. 3 M der Erdmittelpunkt, in das Auge des Beschauers bei B dringe der gebrochene Strahl AEDCB, der bei A unter dem Winkel $i_\lambda$ in die Atmosphäre tritt. Nach mehreren Brechungen falle er bei E unter dem Winkel $i_3$ in die drittunterste Schicht, bei D unter der Neigung $i_2$ in die zweitunterste usf. Die zugehörigen Brechungswinkel haben den gleichen Index, nur oben einen Strich. Die Entfernungen der Punkte der Brechung von M seien r mit der bezüglichen Zahl als Index. Dann ist nach dem Brechungsgesetz

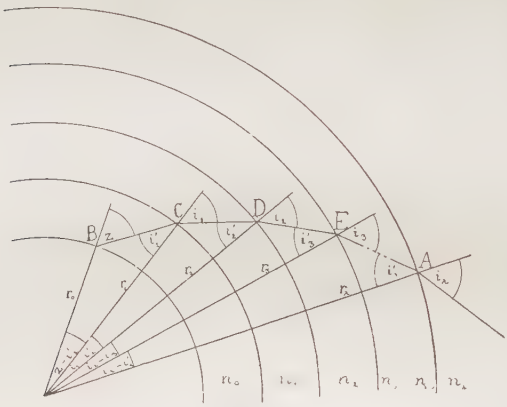

Fig. 3.

$$n_0 \sin i'_1 = n_1 \sin i_1$$
$$n_1 \sin i'_2 = n_2 \sin i_2$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$n_{\lambda-1} \sin i'_\lambda = n_\lambda \sin i_\lambda,$$

woraus durch Multiplikation der einzelnen Seiten folgt

$$(4) \qquad n_0 \sin i'_1 \sin i'_2 \ldots \sin i'_\lambda = n_\lambda \sin i_1 \sin i_2 \ldots \sin i_\lambda.$$

Ferner läßt sich aus Fig. 3 ablesen

$$r_1 \sin i'_1 = r_0 \sin z$$
$$r_2 \sin i_2 = r_1 \sin i_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_\lambda \sin i'_\lambda = r_{\lambda-1} \sin i_{\lambda\ 1}$$

woraus, wie oben, folgt

(5) $\quad r_\lambda \sin i'_1 \sin i'_2 \ldots \sin i'_\lambda = r_0 \sin z \sin i_1 \ldots \sin i_{\lambda-1}.$

Gl. (4) durch Gl. (5) dividiert ergibt

$$\frac{n_0}{r_\lambda} = \frac{n_\lambda \sin i_\lambda}{r_0 \sin z},$$

oder

(6) $\quad r_\lambda\, n_\lambda \sin i_\lambda = r_0\, n_0 \sin z = \text{const} = \gamma, \quad$ w. z. b. w.

Damit sind auch sämtliche Einfallswinkel i bestimmt.

Für die Weglängen $d_\lambda$ innerhalb der einzelnen Schichten kann man sogleich aus Fig. 3 entnehmen,

(7) $$d_\lambda = r_\lambda \frac{\sin (i_\lambda - i'_{\lambda+1})}{\sin i'_{\lambda+1}}$$

Somit ist das System durch folgende Tabelle bestimmt, wo die Indizes $\lambda$ von 0 bis 10 laufen.

Längen in Kilometern.

| Brechungsexpon. $n_\lambda$ | Radius der Schichten $r_\lambda$ | Scheinb. Zenitdistanz 90° Einfallswinkel $i_\lambda$ | Brechungswinkel $i'_\lambda$ | Wegl. $d_\lambda$ | Scheinb. Zenitdistanz 60° Einfallswinkel $i_\lambda$ | Brechungswinkel $i'_\lambda$ | Wegl. $d_\lambda$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00029 | 6370,29 | 90° 0′ 0″ | — | 116 | 60° 0′ 0″ | — | 2 | 0 |
| 1,00026 | 6371,35 | 89° 3′15″ | 88°57′20″ | 52 | 59°59′11″ | 59°59′ 1″ | 2 | 1 |
| 1,00023 | 6372,41 | 88°39′44″ | 88°35′26″ | 39 | 59°58′23″ | 59°58′12″ | 2 | 2 |
| 1,00020 | 6373,46 | 88°21′52″ | 88°18′17″ | 33 | 59°57′35″ | 59°57′24″ | 2 | 3 |
| 1,00017 | 6374,52 | 88° 6′37″ | 88° 3′33″ | 30 | 59°56′46″ | 59°56′35″ | 2 | 4 |
| 1,00014 | 6375,57 | 87°53′23″ | 87°50′36″ | 27 | 59°55′57″ | 59°55′46″ | 2 | 5 |
| 1,00011 | 6376,63 | 87°41′15″ | 87°38′44″ | 25 | 59°55′ 9″ | 59°54′58″ | 2 | 6 |
| 1,00008 | 6377,69 | 87°30′ 7″ | 87°27′47″ | 23 | 59°54′21″ | 59°54′10″ | 2 | 7 |
| 1,00005 | 6378,75 | 87°19′44″ | 87°17′33″ | 21 | 59°53′33″ | 59°53′22″ | 2 | 8 |
| 1,00003 | 6379,81 | 87° 9′59″ | 87° 7′55″ | 20 | 59°52′44″ | 59°52′33″ | 2 | 9 |
| 1,00000 | 6380,87 | 87° 0′ 8″ | 86°58′49″ | — | 59°51′52″ | 59°51′41″ | — | 10 |

Für die trigonometrische Durchrechnung kommen nunmehr dieselben Formeln wie oben in Betracht. Bei der in diesem Kapitel gewählten Bezeichnungsweise lautet die Formel für die meridionale Schnittweite

$$\frac{n_{\lambda-1}\cos^2 i'_\lambda}{t'_\lambda} - \frac{n_\lambda \cos^2 i_\lambda}{t_\lambda} - \frac{n_{\lambda-1}\cos i'_\lambda - n_\lambda \cos i_\lambda}{r_\lambda}$$

woraus nach einigen analogen Umformungen wie oben und durch Einführung der Eulerschen Konstanten $\gamma$ wird

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{t'_\lambda} = \dfrac{n_\lambda \cos^2 i_\lambda}{n_{\lambda-1} t_\lambda \cos^2 i'_\lambda} + \dfrac{n_\lambda \sin(i_\lambda - i'_\lambda)}{\gamma \cos^2 i'_\lambda} \\ t_{\lambda-1} = t'_\lambda - d_{\lambda-1} \end{cases}$$

Aus dieser Rekursionsformel erhält man $t_0$, indem man $\lambda$ von 10 bis 1 abnehmen läßt.

Die Ermittelung des sagittalen Bildpunktes erfolgt, gesondert hiervon, mittels Gl. (8) des zweiten Kapitels

$$(8a)\qquad s_0 = \frac{R \sin z}{\Delta i}$$

## § 8.

**Trigonometrische Durchrechnung je eines Meridionalbündels von 90° und 60° scheinbarer Zenitdistanz unter Zugrundelegung folgender Substitution in Gl. (8):**

$$\frac{1}{t'} = \frac{Z_1}{N_1} + \frac{Z_2}{N_2} = B_1 + B_2.$$

Zenitdistanz $z = 90^0$.

| | $\lambda = 10$ | $\lambda = 9$ | $\lambda = 8$ | $\lambda = 7$ | $\lambda = 6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| log $n\lambda$ | | 0,0000087 | 0,0000217 | 0,0000347 | 0,0000478 |
| 2 log cos $i\lambda$ | | 7,3880812 | 7,3368240 | 7,2786838 | 7,2116824 |
| log $Z_1$ | | 7,3880899 | 7,3368457 | 7,2787185 | 7,2117302 |
| log $t\lambda$ | | 4,6641745 | 4,2298072 | 3.9903349 | 3,8121999 |
| log $n\lambda_{-1}$ | | 0,0000217 | 0,0000347 | 0,0000478 | 0,0000608 |
| 2 log cos $i'\lambda$ | | 7,3985670 | 7,3485684 | 7,2920928 | 7,2272872 |
| log $N_1$ | | 2,0627632 | 1,5784103 | 1,2824755 | 1,0395479 |
| log $Z_1$ | | 7,3880899 | 7,3368457 | 7,2787185 | 7,2117302 |
| log $B_1$ | | 5,3253267 | 5,7584354 | 5,9962430 | 6,1721823 |
| $B_1$ | | 0,000021 1508 | 0,00005733705 | 0,00009913814 | 0,000148656 |
| log $n\lambda$ | 0,0000000 | 0,0000087 | 0,0000217 | 0,0000347 | 0,0000487 |
| log sin $(i\lambda - i'\lambda)$ | 6,5832019 | 6,7789965 | 6,8028461 | 6,8317029 | 6,8645518 |
| log $Z_2$ | 6,5832019 | 6,7790052 | 6,8028678 | 6,8317378 | 6,8645996 |
| log $\gamma$ | 3,8042852 | 3,8042852 | 3,8042852 | 3,8042852 | 3,8042852 |
| 2 log cos $i'\lambda$ | 7,4432866 | 7 3985670 | 7,3485684 | 7,2920928 | 7,2272872 |
| log $N_2$ | 1,2475718 | 1,2028522 | 1,1528536 | 1,0963780 | 1,0315724 |
| log $Z_2$ | 6,5832019 | 6,7790052 | 6,8028678 | 6,8317376 | 6,8645996 |
| log $B_2$ | 5,3356301 | 5,5761550 | 5,6500142 | 5,7353596 | 5,8330272 |
| $B_2$ | | 0,000037684 | 0,00004466982 | 0,00005457004 | 0,0000680812 |
| $B_1$ | | 0,000021151 | 0,00005733705 | 0,00009913814 | 0,000148656 |
| $\frac{1}{t'\lambda}$ | | 0,000058835 | 0,000102007 | 0,0001535012 | 0,000216737 |
| log $\frac{1}{t'\lambda}$ | 5,3356301 | 5,7696321 | 6,0086300 | 6,1861310 | 6,3559331 |
| log $t'\lambda$ | 4,6643699 | 4,2303679 | 3,9913700 | 3,8138690 | 3,6440669 |
| $t'\lambda$ | 46171,06 | 16996,83 | 9803,25 | 6514,33 | 4406,23 |
| $d\lambda_{-1}$ | 20,75 | 21,95 | 23,34 | 25 | 27,19 |
| $t\lambda_{-1}$ | 46150,31 | 16974,88 | 9779,91 | 6489,33 | 4379,04 |

Zenitdistanz $z = 90^0$

| | $\lambda = 5$ | $\lambda = 4$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 2$ | $\lambda = 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log n_\lambda$ | 0,0000608 | 0,0000739 | 0,0000869 | 0,0000999 | 0,0001129 |
| $2 \log \cos i_\lambda$ | 7,1322376 | 7,0363932 | 6,9109674 | 6,7364438 | 6,4353446 |
| $\log Z_1$ | 7,1322984 | 7,0364671 | 6,9110543 | 6,7365437 | 6,4354575 |
| $\log t_\lambda$ | 3,6413650 | 3,5069148 | 3,3735335 | 3,2258415 | 3,0457453 |
| $\log n_{\lambda-1}$ | 0,0000739 | 0,0000869 | 0,0000999 | 0,0001129 | 0,0001260 |
| $2 \log \cos i'_\lambda$ | 7,1511156 | 7,0595652 | 6,9421098 | 6,7817630 | 6,5214774 |
| $\log N_1$ | 0,7925545 | 0,5665669 | 0,3157432 | 0,0077174 | 9,5673487 |
| $\log Z_1$ | 7,1322984 | 7,0364641 | 6,9110543 | 6,7365437 | 6,4354578 |
| $\log B_1$ | 6,3297439 | 6,4699002 | 6,5953111 | 6,7288263 | 6,8681088 |
| $B_1$ | 0,000218647 | 0,000295053 | 0,000393832 | 0,000535582 | 0,000738089 |
| $\log n_\lambda$ | 0,0000608 | 0,0000739 | 0,0000869 | 0,0000999 | 0,0001129 |
| $\log \sin (i_\lambda - i'_\lambda)$ | 6,9082913 | 6,9503926 | 7,0180132 | 7,0971995 | 7,2358030 |
| $\log Z_2$ | 6,9083521 | 6,9504665 | 7,0181001 | 7,0972944 | 7,2359159 |
| $\log \gamma$ | 3,8042852 | 3,8042852 | 3,8042852 | 3,8042852 | 3,8042852 |
| $2 \log \cos i'_\lambda$ | 7,1511156 | 7,0595652 | 6,9421098 | 6,7817630 | 6,5214774 |
| $\log N_2$ | 0,9554008 | 0,8638504 | 0,7463950 | 0,5860482 | 0,3259626 |
| $\log Z_2$ | 6,9083521 | 6,9504665 | 7,0181001 | 7,0972944 | 7,2359159 |
| $\log B_2$ | 5,9529513 | 6,0866161 | 6,2717051 | 6,5112462 | 6,9101533 |
| $B_2$ | 0,0000897326 | 0,000122072 | 0,000186941 | 0,000324524 | 0,000813118 |
| $B_1$ | 0,000218647 | 0,000295053 | 0,000393832 | 0,000535582 | 0,000738089 |
| $\frac{1}{t'_\lambda}$ | 0,000308380 | 0,000417125 | 0,000580773 | 0,000860106 | 0,001551207 |
| $\log \frac{1}{t'_\lambda}$ | 6,4890862 | 6,6202662 | 6,7640065 | 6,9345520 | 7,1906706 |
| $\log t'_\lambda$ | 3,5109138 | 3,3797338 | 3,2359935 | 3,0654480 | 2,8093294 |
| $t'_\lambda$ | 3242,75 | 2397,36 | 1721,84 | 1162,65 | 644,64 |
| $d_{\lambda-1}$ | 29,72 | 33,98 | 39,78 | 51,57 | 116,14 |
| $t_{\lambda-1}$ | 3213,03 | 2363,38 | 1682,06 | 1111,08 | 528,50 |

Resultat: $t_0 = 529$ km

## Zenitdistanz $z = 60^0$

| | $\lambda = 10$ | $\lambda = 9$ | $\lambda = 8$ | $\lambda = 7$ | $\lambda = 6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| log $n_\lambda$ | | 0,0000130 | 0,0000217 | 0,0000347 | 0,0000478 |
| 2 log cos $i_\lambda$ | | 9,4011120 | 9,4007566 | 9,4004080 | 9,4000590 |
| log $Z_1$ | | 1,4011250 | 9,4007783 | 9,4004427 | 9,4001068 |
| log $t_\lambda$ | | 7,4164182 | 7,1152273 | 6,9390001 | 6,8139384 |
| log $n_{\lambda-1}$ | | 0,0000217 | 0,0000347 | 0,0000478 | 0,0000608 |
| 2 log cos $i'_\lambda$ | | 9,4011800 | 9,4008360 | 9,4004878 | 9,4001400 |
| log $N_1$ | | 6,8176199 | 6,5160980 | 6,3395357 | 6,2141392 |
| log $Z_1$ | | 9,4011250 | 9,4007783 | 9,4004427 | 9,4001068 |
| log $B_1$ | | 2,5835051 | 2,8846803 | 3,0609070 | 3,1859676 |
| $B_1$ | | 0,000000038327 | 0,0000000677697 | 0,000000115054 | 0,00000015345 |
| log $n_\lambda$ | 0,0000000 | 0,0000130 | 0,0000217 | 0,0000347 | 0,0000478 |
| log sin $(i_\lambda - i'_\lambda)$ | 5,7269676 | 5,7269676 | 5,7269676 | 5,7269676 | 5,7269676 |
| log $Z_2$ | 5,7269676 | 5,7269806 | 5,7209893 | 5,7270023 | 5,7270154 |
| log $\gamma$ | 3,7418158 | 3,7418158 | 3,7418158 | 3,7418158 | 3,7418158 |
| 2 log cos $i'_\lambda$ | 9,4015700 | 9,4011800 | 9,4008360 | 9,4004878 | 9,4001400 |
| log $N_2$ | 3,1433858 | 3,1429958 | 3,1426518 | 3,1423036 | 3,1419558 |
| log $Z_2$ | 5,7269676 | 5,7269806 | 5,7269893 | 5,7270023 | 5,7270154 |
| log $B_2$ | 2,5835818 | 2,5839848 | 2,5843375 | 2,5846987 | 2,5850596 |
| $B_2$ | 0,000000038334 | 0,000000038369 | 0,0000000384006 | 0,000000038433 | 0,000000038464 |
| $B_1$ | | 0,000000038327 | 0,0000000677697 | 0,000000115054 | 0,00000015345 |
| $\frac{1}{t'_\lambda}$ | 0,000000038334 | 0,000000076696 | 0,0000001150803 | 0,000000153487 | 0,00000019191 |
| log $\frac{1}{t'_\lambda}$ | 2,5835818 | 2,8847727 | 3,0609999 | 3,1860616 | 3,2830976 |
| log $t'_{\lambda-1}$ | 7,4164182 | 7,1152273 | 6,9390001 | 6,8139384 | 6,7169024 |

Zenitdistanz $z = 60^0$

| | $\lambda = 5$ | $\lambda = 4$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 2$ | $\lambda = 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| log $n_\lambda$ | 0,0000608 | 0,0000739 | 0,0000869 | 0,0000999 | 0,0001129 |
| 2 log cos $i_\lambda$ | 9,3997100 | 9,3993572 | 9,3990968 | 9,3986472 | 9,3982972 |
| log $Z_1$ | 9,3997708 | 9,3994311 | 9,3991837 | 9,3987471 | 9,3984101 |
| log $t_\lambda$ | 6,7169024 | 6,6375741 | 6,5704884 | 6,5122707 | 6,4609189 |
| log $n_{\lambda-1}$ | 0,0000739 | 0,0000869 | 0,0000999 | 0,0001129 | 0,0001260 |
| 2 log cos $i'_\lambda$ | 9,3997920 | 9,3994340 | 9,3990760 | 9,3986540 | 9,3982974 |
| log $N_1$ | 6,1167683 | 6,0370950 | 5,9696643 | 5,9110376 | 5,8593423 |
| log $Z_1$ | 9,3997708 | 9,3994311 | 9,3991837 | 9,3987471 | 9,3984101 |
| log $B_1$ | 3,2830025 | 3,3623361 | 3,4295194 | 3,4877095 | 3,5390678 |
| $B_1$ | 0,000000019187 | 0,000000023032 | 0,000000268856 | 0,000000307403 | 0,000000345994 |
| log $n_\lambda$ | 0,0000608 | 0,0000739 | 0,0000869 | 0,0000999 | 0,0001129 |
| log sin $(i_\lambda - i'_\lambda)$ | 5,7269676 | 5,7269676 | 5,7269676 | 5,7269676 | 5,7269676 |
| log $Z_2$ | 5,7270284 | 5,7270415 | 5,7270545 | 5,7270675 | 5,7270805 |
| log $\gamma$ | 3,7418158 | 3,7418158 | 3,7418158 | 3,7418158 | 3,7418158 |
| 2 log cos $i'_\lambda$ | 9,3997920 | 9,3994340 | 9,3990760 | 9,3986540 | 9,3982974 |
| log $N_2$ | 3,1416078 | 3,1412498 | 3,1408918 | 3,1404698 | 3,1401132 |
| log $Z_2$ | 5,7270284 | 5,7270415 | 5,7270545 | 5,7270675 | 5,7270805 |
| log $B_2$ | 2,5854206 | 2,5857917 | 2,5861627 | 2,5865977 | 2,5869673 |
| $B_2$ | 0,000000003850 | 0,000000003853 | 0,000000038502 | 0,000000038601 | 0,000000038634 |
| $B_1$ | 0,000000019187 | 0,000000023032 | 0,000000268856 | 0,000000307403 | 0,000000345994 |
| $t'_\lambda$ | 0,00000023037 | 0,000000268851 | 0,000000307418 | 0,000000346004 | 0,000000384628 |
| log $\frac{1}{t'_\lambda}$ | 3,3624259 | 3,4295116 | 3,4877293 | 3,5390811 | 3,5850409 |
| log $t'_\lambda$ | 6,6375741 | 6,5704884 | 6,5122707 | 5,4609181 | 6,4149591 |
| $t_{\lambda-1}$ | | | | | 2599915 |

Resultat: $t_0 = 2\,599\,915$ km

Für die sagittale Schnittweite kommen die im zweiten Kapitel dafür gewonnenen Resultate in Betracht, so daß sich für dieses Kapitel folgende Übersicht der Resultate ergibt:

| Scheinb. Zenitdistanz z | Meridionale Schnittweite t | Sagittale Schnittweite s |
|---|---|---|
| $90^0$ | 529 | 627470 |
| $60^0$ | 2599915 | 11379240 |

beides vom Beschauer aus in Kilometern nach hinten gerechnet.

(Anmerkung. Bei der Durchrechnung des zweiten Strahles von $60^0$ scheinbarer Zenitdistanz wurde die im Verhältnis zu den Schnittweiten außerordentlich kleine Dicke $d_i$ der Schichten vernachlässigt. Vgl. die Tabelle Seite 19).

## IV. Kapitel.

# Die Atmosphäre als Medium mit unendlich vielen unendlich dünnen Schichten nach der Simpsonschen Refraktionstheorie.

### § 9.

Es wird nunmehr der Weg beschritten, den das bereits zitierte Gleichensche Integral weist. Deshalb sei hier eine kurze Ableitung dieser Formel gegeben.

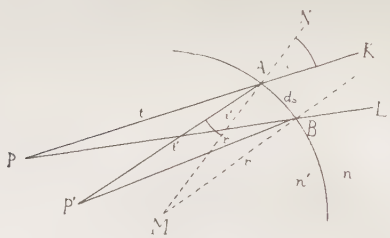

Fig. 4.

Fig. 4 stellt einen Hauptschnitt dar, in dem die beiden unendlich nahen Strahlen KAP und LBP ein Meridionalbündel bilden mit dem Objektpunkt P. Bei A und B treffen sie auf die um M mit dem Radius r geschlagene brechende Kugel, deren Brechungsexponent n' ist, und werden nach dem meridionalen Bildpunkt P' gebrochen. Da A von B nur um die unendlich kleine Strecke ds entfernt ist, sei

$$AP = BP = t$$
$$AP' = BP' = t'$$
$$AM = BM = r.$$

Ferner ist

$\sphericalangle KAN = \sphericalangle MAP = \sphericalangle i$ der Einfallswinkel,
$\sphericalangle MAP' = \sphericalangle i'$ der Brechungswinkel.

Sind die Brechungsexponenten vor und nach der Brechung n und n′, so gilt in der Abbeschen Zählungs- und Bezeichnungsweise[1]) folgende Beziehung

$$(1) \qquad n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = Q^{I}.$$

Jede Seite einer solchen Gleichung nennt man eine optische Invariante, da sie vor und nach der Brechung den gleichen Wert hat. Berücksichtigt man nun noch das Brechungsgesetz,

$$(2) \qquad n \sin i = n' \sin i' = Q,$$

dessen Seiten gleichfalls Invarianten sind, so kann man aus (1) und (2), wenn n, n′, i, r und t gegeben sind, t′ bestimmen.

Für den Zweck dieser Untersuchung ist jedoch die Invariante $Q^{I}$ umzuformen. In Fig. 5 sind dazu die beiden unendlich dünnen Bündel ABP und ABP′ der Fig. 4 als Linien KAP und AP′ gezeichnet. Von M seien auf sie die Lote MR und MR′ bzw. gefällt, und M sei mit A, P und P′ verbunden. Dann ist

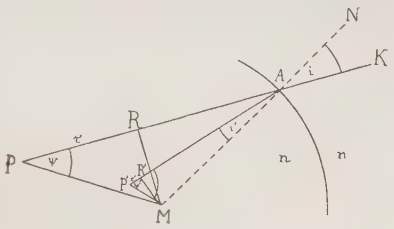

Fig. 5.

$$AP = t;$$

man setze ferner

$$RP = \tau$$
$$R'P' = \tau'$$

dann ist

$$t = \tau + r \cos i.$$

Dies in (1) eingesetzt, ergibt

$$Q^{I} = n\left(\frac{\cos i}{r} - \frac{\cos^2 i}{\tau + r \cos i}\right)$$
$$= n\left(\frac{\tau \cos i}{\tau r + r^2 \cos i}\right),$$

[1]) Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik, S. 153 ff.

woraus folgt

$$\frac{1}{r^2 Q^1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r\cos i}\right), \tag{3}$$

was wiederum eine Invariante ist. Setzt man jetzt in Fig. 5

$$\sphericalangle APM = \psi$$
$$\sphericalangle AP'M = \psi',$$

so ergibt sich

$$\tau = r \sin i \operatorname{ctg} \psi$$
$$\tau' = r \sin i' \operatorname{ctg} \psi', \tag{4}$$

was, in Gl. (3) eingesetzt, liefert

$$\frac{1}{r^2 Q^1} = \frac{1}{rn}\left(\frac{1}{\sin i \operatorname{ctg} \psi} + \frac{1}{\cos i}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \psi}{n r \sin i}.$$

Führt man hier die Invariante Q (Gl. 2) ein, so ergibt sich, daß auch

$$\frac{Q}{r Q^1} = \operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \psi$$

eine optische Invariante ist. Diese kann man aber auch schreiben

$$\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} \psi'. \tag{5}$$

Nunmehr sei ein System von um M konzentrisch geschichteten Medien angenommen, deren kugelförmige Grenzflächen nacheinander die Radien $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ haben. In derselben Reihenfolge seien die Einfallswinkel $i_1, i_2, \ldots i_\lambda$, die meridionalen Schnittpunkte vor der Brechung $P_1, P_2, \ldots P_\lambda$, nach der Brechung $P'_1, P'_2, \ldots P'_\lambda$. Dann folgt sogleich, daß jeweils $P'_1$ und $P_2$, $P'_2$ und $P_3, \ldots P'_{\lambda-1}$ und $P_\lambda$ identisch sind. Bildet ferner der nach $P_\varkappa$ zielende Strahl mit $MP_\varkappa$ den Winkel $\psi_\varkappa$, und ebenso der nach $P'_\varkappa$ zielende Strahl mit $MP'_\varkappa$ den Winkel $\psi'_\varkappa$, wo $\varkappa$ alle Werte von 1 bis $\lambda$ annehmen kann, so erkennt man, daß

$$\sphericalangle \psi'_{\varkappa-1} = \sphericalangle \psi_\varkappa. \tag{6}$$

Denkt man sich nunmehr alle Werte der Gl. (5) aufgeschrieben, so wird aus ihnen durch Einführung der Gl. (6)

$$\operatorname{tg}\psi_1 + \operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg}\psi_2 + \operatorname{tg} i'_1$$
$$\cdots$$
$$\operatorname{tg}\psi_\lambda + \operatorname{tg} i_\lambda = \operatorname{tg}\psi'_\lambda + \operatorname{tg} i'_\lambda,$$

was summiert die Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi_1 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} \operatorname{tg} i_\varkappa = \operatorname{tg}\psi'_\lambda + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} \operatorname{tg} i'_\varkappa \tag{7}$$

ergibt.

Man ist also, falls $\psi_1$, sämtliche i und i' bekannt sind, in der Lage, daraus $\psi'_\lambda$ zu berechnen, d. h. den Winkel, den das aus dem brechenden System tretende Bündel mit der Verbindung von M und dem letzten Bildpunkt $P'_\lambda$ bildet.

Die irdische Atmosphäre ist nun ein konzentrisch geschichtetes Medium, dessen Brechungsexponent eine stetige Funktion der Entfernung von M, in diesem Falle dem Erdmittelpunkt, ist. Alsdann sind die Größen $n_\varkappa$ und $n'_\varkappa$, sowie $i_\varkappa$ und $i'_\varkappa$ nur um unendlich kleine Größen voneinander verschieden, was eine neue Umformung der Gl. (7) erlaubt. Wir schreiben sie

$$\operatorname{tg}\psi'_\lambda - \operatorname{tg}\psi_1 = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} \operatorname{tg} i'_\varkappa - \operatorname{tg} i_\varkappa. \tag{8}$$

Setzt man nun

$$i'_\varkappa = i_\varkappa + \mathrm{d}\, i_\varkappa,$$

so ist

$$\operatorname{tg} i'_\varkappa = \operatorname{tg} i_\varkappa + \frac{\mathrm{d}i_\varkappa}{\cos^2 i_\varkappa}. \tag{9}$$

Ist ferner

$$n'_\varkappa = n_\varkappa + \mathrm{d}n_\varkappa,$$

so folgt aus

$$n_\varkappa \sin i_\varkappa = n'_\varkappa \sin i'_\varkappa$$
$$n_\varkappa \sin i_\varkappa = (n_\varkappa + \mathrm{d}n_\varkappa)\,(\sin i_\varkappa + \cos i_\varkappa\, \mathrm{d}i_\varkappa),$$

woraus unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Gliedern höherer Ordnung folgt

$$\mathrm{d}n_\varkappa \sin i_\varkappa + n_\varkappa \cos i_\varkappa\, \mathrm{d}i_\varkappa = 0.$$

Hieraus $di_\varkappa$ in Gl. (9) eingesetzt, ergibt

$$\operatorname{tg} i'_\varkappa - \operatorname{tg} i_\varkappa = -\frac{dn_\varkappa \sin i_\varkappa}{n_\varkappa \cos^3 i_\varkappa}.$$

Führt man diesen Wert der Gl. (10) in Gl. (8) ein, so verwandelt sich dort das Summenzeichen in das bestimmte Integral

$$(11) \qquad \operatorname{tg} \psi'_\lambda - \operatorname{tg} \psi_1 = \int_{n=n_{\lambda+1}}^{n=n_1} \frac{\sin i \, dn}{n \cos^3 i}.$$

Diese Formel läßt sich durch Einführung der Eulerschen Konstanen $\gamma$, die auf S. 18 abgeleitet worden ist, weiter umformen. Aus

$$n r \sin i = \gamma$$

folgt nämlich

$$(12) \qquad \sin i = \frac{\gamma}{n r}$$

und

$$\cos i = \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2 r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(13) \qquad \cos^3 i = \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2 r^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man Gl. (12) und (13) in (11) ein, so erhält man nach einer leichten Umformung

$$(14) \qquad \operatorname{tg} \psi'_\lambda - \operatorname{tg} \psi_1 = \gamma \int_{r=R+h}^{r=R} \frac{r^2 n \, dn}{(r^2 n^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = J$$

wobei n als Funktion von r vorausgesetzt, R der Erdradius und h die Höhe der Atmosphäre ist.

Das Integral hat jedoch eine Stelle, wo es unstetig wird: für $90^0$ scheinbarer Zenitdistanz nämlich ist

$$\gamma = n r \sin 90^0 = n r$$
$$\gamma^2 = n^2 r^2,$$

wodurch der Nenner o, das Integral also unendlich groß wird. Der hier auftretende singuläre Punkt der Funktion

ist so zu erklären: in Fig. 5 ist bei einer beliebigen, von $90^0$ verschiedenen Einfallshöhe des Strahles KAP der zugehörige Meridionalstrahl LBP zu beiden Seiten von KAP konstruierbar, wodurch sich zeigt, daß die Funktion nach beiden Seiten gleichartig fortschreitet, also stetig ist. Bei $90^0$ Einfallswinkel ist dagegen der Strahl nur auf der Seite nach M hin konstruierbar, da er auf der andern überhaupt kein ds mehr abschneidet. Deshalb wird die Funktion hier unstetig.

## § 10.

Ist nun das Integral gelöst, so wird aus ihm die meridionale Schnittweite folgendermaßen bestimmt.

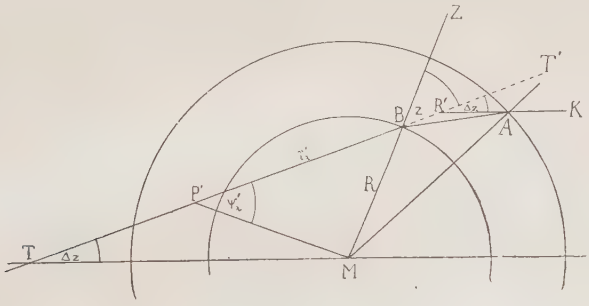


Fig. 6.

In Fig. 6 sei M der Erdmittelpunkt, KA das einfallende Bündel, das von A bis B als Kurve durch die Atmosphäre gebrochen wird. T'BT sei die Tangente in B, so daß das Objekt einem Auge in B in Richtung BT' erscheint. $\sphericalangle T'BZ = \sphericalangle z$ ist dann die scheinbare Zenitdistanz. Ferner schneidet KA, über A hinaus verlängert, BT' in R'; $\sphericalangle KR'T' = \sphericalangle \Delta z$ ist also die Refraktion.

Nun muß sich auf T'BT als dem austretenden Strahl der meridionale Bildpunkt P' befinden. In Fig. 6 ist alsdann $\sphericalangle PP'M = \sphericalangle \psi'_\lambda$, während $\sphericalangle \psi_1 = 0$ wird, weil das Objekt unendlich weit entfernt ist. Deshalb lautet Gl. (14)

(15) $$\operatorname{tg} \psi'_\lambda = J.$$

Aus $\triangle BP'M$ folgt nunmehr, da $BP' = t'_\lambda$ die meridionale Schnittweite ist, und $MB = R$ der Erdradius,

$$\frac{t'_\lambda}{R} = \frac{\sin(\psi'_\lambda + z)}{\sin \psi'_\lambda}$$

$$= \cos z + \frac{\sin z}{\operatorname{tg} \psi'_\lambda},$$

woraus mit Hilfe von Gl. (15) wird

$$t'_\lambda = R\left(\cos z + \frac{\sin z}{J}\right). \tag{16}$$

Für die sagittale Schnittweite geht auch aus dieser Figur die bereits abgeleitete Gleichung hervor

$$s'_\lambda = R\,\frac{\sin z}{\triangle z}$$

## § 11.

Es wurde oben zur Lösung der Gl. (14) vorausgesetzt, daß n als Funktion von r gegeben und r somit die Integrationsvariable sei. Der Zusammenhang zwischen beiden, den die Simpsonsche Refraktionstheorie gibt, läßt es jedoch als vorteilhafter erscheinen, beide, n und r, durch die Dichtigkeit $\varrho$ auszudrücken, und diese damit zur alleinigen Variablen zu wählen.

Wie bereits oben (S. 16) ausgeführt, setzt Simpson

$$\varrho = \frac{n^2 - 1}{n_0^2 - 1} = \frac{R + h - r}{h}, \tag{18}$$

woraus folgt

$$n = + \sqrt{\varrho\,(n_0^2 - 1) + 1} = W, \tag{19}$$

$$dn = \frac{n_0^2 - 1}{2\sqrt{\varrho\,(n_0^2 - 1) + 1}} \cdot d\varrho = Q\,d\varrho \tag{20}$$

und

$$r^2 = R^2 + 2Rh\,(1 - \varrho) + h^2\,(1 - \varrho)^2 = K. \tag{21}$$

Führt man Gl. (19) bis (21) in Gl. (14) ein, so erhält diese die folgende Form:

$$J = \gamma \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \frac{(R^2 + 2\,Rh\,(1-\varrho) + h^2\,(1-\varrho)^2)}{((R^2 + 2\,Rh\,(1-\varrho) + h^2\,(1-\varrho)^2)} \cdot \frac{\sqrt{\varrho\,(n_0{}^2 - 1) + 1} \cdot \frac{n_0{}^2 - 1}{2\sqrt{\varrho\,(n_0{}^2 - 1) + 1}} \cdot d\varrho}{(\varrho(n_0{}^2 - 1) + 1) - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{22}$$

$$= \gamma \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \frac{K \cdot W \cdot Q \cdot d\varrho}{(K \cdot W^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \frac{Z\,d\varrho}{N}. \tag{22a}$$

Der einfachste Weg, dieses Integral zu lösen, ist wohl der der geometrischen Quadratur. Es werde deshalb $d\varrho = 0{,}1$ gesetzt, und das Integral verwandelt sich wieder in folgende Summe:

$$J = \gamma\, d\varrho \sum_{\varkappa=0,1}^{\varkappa=1} f(\varrho\varkappa) = \gamma d\varrho \sum_{\varkappa=0,1}^{\varkappa=1} J_\varkappa. \tag{23}$$

Bei der Ausrechnung ergibt sich nunmehr, daß die Substitutionswerte K, W und Q für ein bestimmtes $\varrho$ bei beliebiger Einfallshöhe den gleichen Wert behalten, und daß sich durch $\gamma$ nur der Nenner ändert. Ferner stellt sich heraus, daß bei $85^0$ scheinbarer Zenitdistanz bereits die $J_\varkappa$ einen nur um 0,02 voneinander verschiedenen Wert besitzen, der bei abnehmender Zenitdistanz sehr rasch noch weit kleiner wird, so daß es von $75^0$ an genügt, einen Mittelwert etwa für $\varrho = 0{,}5$ zu berechnen und diesen, um J zu gewinnen, zu verzehnfachen. Das ganze Verfahren ist dadurch außerordentlich erleichtert, und man erhält auf diese Weise folgende Werte der J

| Scheinb. Zenitdist. | J. |
|---|---|
| $85^0$ | 0,3531 |
| $80^0$ | 0,0515 |
| $75^0$ | 0,0157 |
| $70^0$ | 0,0067 |
| $65^0$ | 0,0034 |
| $60^0$ | 0,0020 |

Setzt man diese Werte in Gl. (16) ein, so ist daraus folgende Tabelle der t leicht zu berechnen, in der zum Vergleich auch die Resultate der übrigen Kapitel danebengesetzt sind.

Allgemeine Tabelle der meridionalen und sagittalen Schnittweiten in Kilometern vom Beschauer aus nach hinten.

| Scheinb. Zenitdist. z | t (meridionale Schnittw.) gefunden durch | | | s (Sagitt. (Schnittw.) |
|---|---|---|---|---|
| | a) Keplersche Atm. | b) trigon. Durchr. | c) Gleichensches Integral | |
| $90^0$ | 496 | 529 | — | 627 470 |
| $85^0$ | 17 530 | — | 18 528 | 2 230 000 |
| $80^0$ | 121 060 | — | 123 116 | 4 100 000 |
| $75^0$ | 387 320 | — | 393 389 | 6 000 000 |
| $70^0$ | 888 561 | — | 895 429 | 7 900 000 |
| $65^0$ | 1 663 840 | — | 1 677 840 | 9 682 000 |
| $60^0$ | 2 745 400 | 2 599 913 | 2 768 235 | 11 379 240 |

§ 12.

## Anhang zum IV. Kapitel.

Es ist nicht ohne Interesse, das Integral der Gl. (16) unter Zugrundelegung folgender Hypothese zu lösen, die allerdings auf die irdische Atmosphäre nicht zutrifft, wohl aber bei einem andern geschichteten Medium realisiert sein könnte. Des Vergleiches halber sei ein Medium von den

Dimensionen der Atmosphäre angenommen, in dem der Zusammenhang zwischen r und n durch die Gleichung ausgedrückt sei

$$r = \frac{c}{n}, \tag{1}$$

wo c eine Konstante ist, die dadurch bestimmt ist, daß

$$R = \frac{c}{n_0},$$

somit $c = R\, n_0$ ist

Gl. (1) in das Integral

$$J = \gamma \int_{r=R+h}^{r=R} \frac{r^2 n\, dn}{(r^2 n^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

eingesetzt, ergibt

$$J = \gamma \int_{n=1}^{n=n_0} \frac{\frac{c^2}{n}\, dn}{(c^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hier die Konstanten vor das Integral gesetzt, ergibt sich folgende einfache Gleichung

$$J = \frac{\gamma c^2}{(c^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_{n=1}^{n=n_0} \frac{dn}{n} \tag{2}$$

$$= \frac{\gamma c^2}{(c^2 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot l\, n_0.$$

Auch dies wird für den Horizont unendlich groß; setzt man dagegen für die übrigen Zenitdistanzen die Werte von $\gamma$ ein, so erhält man für J Werte, die sich von denen des andern Integrals nur wenig unterscheiden, wie folgende Tabelle zeigt.

| z | Hypothetische Werte | Wahre Werte | Differenz |
|---|---|---|---|
| $90^0$ | — | — | — |
| $85^0$ | 0,4365 | 0,3531 | 0,0834 |
| $80^0$ | 0,0545 | 0,0515 | 0,0030 |
| $75^0$ | 0,0161 | 0,0157 | 0,0004 |
| $70^0$ | 0,0068 | 0,0067 | 0,0001 |
| $65^0$ | 0,0034 | 0,0034 | 0,0000 |
| $60^0$ | 0,0020 | 0,0020 | 0,0000 |

## V. Kapitel.

# Die gewonnenen Resultate, bezogen auf das astronomische Fernrohr.

### § 13.

In Fig. 7 sei FF′ die optische Achse, Ob das Objektiv eines in B so aufgestellten Fernrohrs, daß seine optische Achse mit der Achse des eintretenden Bündels zusammen-

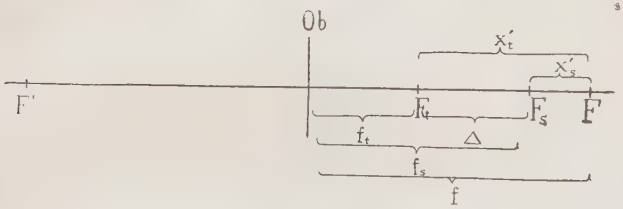


Fig. 7.

fällt, ein hindurchschauendes Auge das Objekt also genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erblickt. F′ sei der vordere, F der hintere Brennpunkt des Objektivs, das in das Fernrohr tretende Meridionalbündel werde durch Ob nach $F_t$, das Sagittalbündel nach $F_s$ gebrochen. Ist ObF, die hintere Brennweite des Objektives, = f (und damit, da das System in Luft liegt, auch gleich der vorderen Brennweite f′), so heiße $Ob\,F_t = f_t$ und $Ob\,F_s = f_s$. Ferner sei der Abstand der astigmatischen Bildpunkte vom hinteren Brennpunkt bzw. gleich $x'_t$ und $x'_s$, während die Abstände $x_t$ und $x_s$ der in den vorigen Kapiteln berechneten astigmatischen Bildpunkte, die offenbar für das Fernrohr die Rolle von Objektpunkten spielen, vom vorderen Brennpunkt gleich der

Schnittweite t und s gesetzt werden können, da im Vergleich zu t und s die vordere Brennweite verschwindend klein ist. Da nun auch die Öffnung h des Objektives gegeben ist, so wird durch die Brechung im Objektiv ein neues astigmatisches Bündel erzeugt, dessen Dimensionen wie folgt zu berechnen sind.

Bezogen auf die Brennpunkte gilt für die Durchrechnung eines Strahls dnrch ein brechendes Medium die Formel der geometrischen Optik

$$xx' = ff',$$

oder, da hier $f = f'$ ist,

$$xx' = f^2, \tag{1}$$

wobei x und x' die Entfernungen des Objekt- und des Bildpunktes von den zugehörigen Brennpunkten sind. Für das hier zu berechnende Bündel ergibt sich daraus

$$\begin{cases} x'_s = \dfrac{f^2}{s} \\ x'_t = \dfrac{f^2}{t} \end{cases} \tag{2}$$

Dann geht aus Fig. 7 sogleich hervor

$$f_s = f - x'_s$$
$$f_t = f - x'_t$$

Durch Einführung von (2) ändert sich dies in

$$\begin{cases} f_s = f - \dfrac{f^2}{s} = f\left(1 - \dfrac{f}{s}\right) \\ f_t = f - \dfrac{f^2}{t} = f\left(1 - \dfrac{f}{t}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Um nun Lage und Größe des Kreises kleinster Zerstreuung (vgl. S. 10) zu bestimmen, sind folgende Größen zu berechnen [1]): sein Abstand r vom meridionalen Bildpunkt, der Neigungswinkel $\varphi_1$ der meridionalen und $\varphi_2$ der sagittalen Strahlen.

Es ist nun

[1]) Gleichen, Lehrb. d. geom. Opt., S. 19ff.

$$r = \frac{\triangle \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}, \tag{4}$$

wo $\triangle$ die astigmatische Differenz $f_s - f_t$ ist. Ferner lehrt eine kurze Überlegung, daß

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{h}{f_t} \\ \varphi_2 = \dfrac{h}{f_s} \end{cases} \tag{5}$$

sein muß, wo h die ganze Öffnung des Objektives ist.

Ferner ist bekanntlich der Durchmesser d des Kreises kleinster Zerstreuung

$$d = r\,\varphi_1 \tag{6}$$

Setzt man hier den Wert von r aus Gl. (4) ein, so erhält man

$$d = \triangle \frac{\varphi_1 \cdot \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}, \tag{7}$$

woraus durch Einführung der Gl. (5) wird

$$d = \triangle \frac{\dfrac{h^2}{f_t \cdot f_s}}{\dfrac{h}{f_t} + \dfrac{h}{f_s}}$$

Dividiert man weiter Zähler und Nenner durch $\dfrac{h^2}{f_t \cdot f_s}$, so erhält man

$$d = \frac{\triangle\, h}{f_s + f_t}$$

$$d = h \frac{f_s - f_t}{f_s + f_t} \tag{8}$$

Soll nun beurteilt werden, ob dieser Astigmatismus bei astronomischen Beobachtungen störend auftritt, so muß derjenige Winkel w bestimmt werden, unter dem d, durch das Okular gesehen, dem menschlichen Auge erscheint. Es ist evident, daß die Beobachtung nur so lange genau sein kann, als die Strecke d als Punkt erscheint, d. h. w den physiologischen Grenzwinkel nicht überschreitet. Dies soll nunmehr untersucht werden.

Bezeichnet man mit $D_{ok}$ die Brechkraft des Okulars

(diese wird in Dioptrien gemessen und ist das Reciprokum der Brennweite; allgemein $D = 1/f$. Vgl. darüber Gleichen, Theorie der modern. opt. Instrum., Stuttgart 1911), so ist der Winkel w, unter dem das Objekt d durch das Okular gesehen erscheint,

$$w = d \cdot D_{ok}, \tag{9}$$

was unter Zuhilfenahme von (8) ergibt

$$w = \frac{f_s - f_t}{f_s + f_t} \cdot h \cdot D_{ok}. \tag{10}$$

Nun seien $f_s$ und $f_t$ durch die Objektivbrennweite f und die astigmatischen Schnittweiten vor dem Eintritt in das Fernrohr ausgedrückt, was durch Einführung der Gl. (3) geschieht. Dann nimmt Gl. (10) diese Form an:

$$w = \frac{\left(1 - \frac{f}{s}\right) - \left(1 - \frac{f}{t}\right)}{\left(1 - \frac{f}{s}\right) + \left(1 - \frac{f}{t}\right)} \cdot h \cdot D_{ok}$$

$$= \frac{\frac{f}{t} - \frac{f}{s}}{2 - \left(\frac{f}{t} + \frac{f}{s}\right)} \cdot h \cdot D_{ok}.$$

Erweitert man dies mit $\frac{st}{f}$, so ergibt sich

$$w = \frac{s - t}{\frac{2}{f} st - (s + t)} \cdot h \cdot D_{ok}. \tag{11}$$

$1/f$ ist nun aber nichts anderes als die Brechkraft des Objektives. Nennt man diese $D_{ob}$, so läßt sich Gl. (11) auch schreiben

$$w = \frac{s - t}{2 D_{ob} \cdot st - (s + t)} \cdot h \cdot D_{ok}. \tag{12}$$

Ein Blick auf die Tabelle der Schnittweiten auf S. 34 lehrt nun aber, daß die Größe $(s + t)$ im Nenner verschwindend klein ist gegenüber der Größe $2\,st$, wodurch Gl. (12) auf die einfache Form gebracht wird

$$w = \frac{h\ (s - t)}{2\,st} \cdot \frac{D_{ok}}{D_{ob}}. \tag{13}$$

Vergegenwärtigt man sich nun, daß

$$\frac{D_{ok}}{D_{ob}} = \frac{f_{ob}}{f_{ok}} = v$$

nichts anderes als die Gesamtvergrößerung v des Fernrohrs ist, so nimmt Gl. (13) folgende noch einfachere Form an

$$w = \frac{s - t}{2\,st} \cdot h \cdot v. \tag{14}$$

Gl. (14) lehrt also, daß die Größe des Bildfehlers, den der die atmosphärische Strahlenbrechung begleitende Astigmatismus erzeugt, direkt proportional der Öffnung und der Vergrößerung des angewandten Fernrohrs ist.

§ 14.

Um nun ein Bild von der Größe des Winkels w zu gewinnen, sind folgende Tabellen berechnet worden; und zwar gibt Tabelle I und II den Winkel w für $90^0$ und $85^0$ scheinbarer Zenitdistanz für Öffnungen von 0,1 bis 1 m, fortschreitend um je 0,1 m; und Gesamtvergrößerungen von 100 bis 1000, fortschreitend um je 100. Für $80^0$ bis $60^0$ scheinbarer Zenitdistanz sind in Tabelle III die Größen von w für 0,1 m Öffnung und hundertfache Vergrößerung gegeben, aus denen die übrigen Werte leicht zu entnehmen sind.

**Größe des Winkels w.**

Tabelle I. $z = 90^0$.

| Öffnung in Metern | Gesamtvergrößerung des Fernrohrs | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| 0,1 | 2,1″ | 4,2″ | 6,3″ | 8,4″ | 10,5″ | 12,6″ | 14,7″ | 16,8″ | 18,9″ | 21″ |
| 0,2 | 4,2″ | 8,4″ | 12,6″ | 16,8″ | 21″ | 25,2″ | 29,4″ | 33,6″ | 37,8″ | 42″ |
| 0,3 | 6,3″ | 12,6″ | 18,9″ | 25,2″ | 31,5″ | 37,8″ | 44,1″ | 50,4″ | 56,7″ | 1′3″ |
| 0,4 | 8,4″ | 16,8″ | 25,2″ | 33,6″ | 42″ | 50,4″ | 58,8″ | 1′7″ | 1′16″ | 1′24″ |
| 0,5 | 10,5″ | 21″ | 31,5″ | 42″ | 52,5″ | 1′3″ | 1′14″ | 1′24″ | 1′35″ | 1′45″ |
| 0,6 | 12,6″ | 25,2″ | 37,8″ | 50,4″ | 1′3″ | 1′16″ | 1′28″ | 1′41″ | 1,53″ | 2′6″ |
| 0,7 | 14,7″ | 29,4″ | 44,1″ | 58,8″ | 1′14″ | 1′28″ | 1′43″ | 1′58″ | 2′12″ | 2′27″ |
| 0,8 | 16,8″ | 33,6″ | 50,4″ | 1′7″ | 1′24″ | 1′41″ | 1′58″ | 2′16″ | 2′31″ | 2′48″ |
| 0,9 | 18,9″ | 37,8″ | 56,7″ | 1′16″ | 1′35″ | 1′53″ | 2′12″ | 2′31″ | 2′48″ | 3′9″ |
| 1,0 | 21″ | 42″ | 1′3″ | 1′24″ | 1′45″ | 2′6″ | 2′27″ | 2′48″ | 3′9″ | 3′30″ |

Tabelle II. $z = 85^0$

| Öffnung in Metern | Gesamtvergrößerung v des Fernrohrs | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| 0,1 | 0,06″ | 0,12″ | 0,18″ | 0,24″ | 0,30″ | 0,36″ | 0,42″ | 0,48″ | 0,54″ | 0,60″ |
| 0,2 | 0,12″ | 0,24″ | 0,36″ | 0,48″ | 0,60″ | 0,72″ | 0,84″ | 0,96″ | 1,08″ | 1,20″ |
| 0,3 | 0,18″ | 0,36″ | 0,54″ | 0,72″ | 0,90″ | 1,08″ | 1,26″ | 1,44″ | 1,62″ | 1,80″ |
| 0,4 | 0,24″ | 0,48″ | 0,72″ | 0,96″ | 1,20″ | 1,44″ | 1,68″ | 1,92″ | 2,16″ | 2,40″ |
| 0,5 | 0,30″ | 0,60″ | 0,90″ | 1,20″ | 1,50″ | 1,80″ | 2,10″ | 2,40″ | 2,70″ | 3,00″ |
| 0,6 | 0,36″ | 0,72″ | 1,08″ | 1,44″ | 1,80″ | 2,16″ | 2,52″ | 2,88″ | 3,34″ | 3,60″ |
| 0,7 | 0,42″ | 0,84″ | 1,26″ | 1,68″ | 2,10″ | 2,52″ | 2,94″ | 3,36″ | 3,78″ | 4,20″ |
| 0,8 | 0,48″ | 0,96″ | 1,44″ | 1,92″ | 2,40″ | 2,88″ | 3,30″ | 3,84″ | 4,32″ | 4,80″ |
| 0,9 | 0,54″ | 1,08″ | 1,62″ | 2,10″ | 2,70″ | 3,24″ | 3,78″ | 4,32″ | 4,86″ | 5,40″ |
| 1,0 | 0,60″ | 1,20″ | 1,80″ | 2,40″ | 3,00″ | 3,40″ | 4,20″ | 4,80″ | 5,40″ | 6,00″ |

Tabelle III.

| Öffnung in Metern | Scheinbare Zenitdistanz z | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $80^0$ | $75^0$ | $70^0$ | $65^0$ | $60^0$ |
| 0,1 | 0,007″ | 0,0024″ | 0,001″ | 0,0005″ | 0,0003″ |

bei einer Gesamtvergrößerung von $v = 100$.

Handelt es sich z. B. darum, festzustellen, wie groß das Maß des Astigmatismus für einen Refraktor von 1 m Öffnung und tausendfacher Vergrößerung in $60^0$ scheinbarer Zenitdistanz ist, so ist nach Formel (14) der für 0,1 m Öffnung und hundertfache Vergrößeruug berechnete Wert 0,0003″ aus Tabelle III mit $10 \cdot 10$ zu multiplizieren, da sowohl Öffnung als auch Vergrößerung je das zehnfache dessen betragen, wofür Tabelle III berechnet worden ist. Es ergibt also $w = 0{,}03''$, ein Wert, der nicht mehr wahrnehmbar ist, da er weit unter dem physiologischen Grenzwinkel liegt.

Dieser wurde bisher gemeinhinw zu $= 1'$ angenommen. Neuere Untersuchungen jedoch, die bei der Konstruktion der Entfernungsmesser [1]) notwendig waren, haben gezeigt,

[1]) Siehe Gleichen, Theorie der modern. opt. Instrumente, S. 192 ff.

daß diese Annahme nicht richtig ist, sondern daß er häufig viel kleiner, im günstigsten Falle sogar als $w = 0{,}1' = 6''$ anzunehmen ist.

Nimmt man also den physiologischen Grenzwinkel w als im besten Falle der Sehschärfe $w = 0{,}1' = 6''$, so erkennt man, daß Beobachtungen am Horizont nur mit sehr kleinen Instrumenten möglich sind, wenn sie Anspruch auf höchste Genauigkeit haben sollen. Man sieht jedoch, daß dieser Bildfehler mit steigender Einfallshöhe sehr rasch verschwindet.

Es läßt sich nun noch ein weiterer nicht unwichtiger Gebrauch aus Formel (14) machen. Setzt man hier nämlich $w = 6''$, so gibt die Gleichung (14) durch die Größe v an, welches Maximum der Vergrößerung man bei gegebener Objektivöffnung anwenden darf, ohne daß der Astigmatismus die Genauigkeit der Beobachtung beeinflußt. Tabelle IV gibt die so berechneten Zahlen der höchsten zulässigen Vergrößerung an, und zwar für $90^0$, $85^0$ und $80^0$ scheinbarer Zenitdistanz und für Öffnungen von 0,1 bis 1 m. Bei weniger Zenitdistanz ist, wie die Tabelle zeigt, der Astigmatismus unbedingt zu vernachlässigen, da er sich alsdann erst bei Vergrößerungen zeigt, die aus Gründen der mangelnden Helligkeit nicht anwendbar sind.

Tabelle IV.

| Öffnung in Metern | Scheinb. Zenitdistanz z | | |
|---|---|---|---|
| | $90^0$ | $85^0$ | $80^0$ |
| 0,1 | 290 | 9667 | 85 300 |
| 0,2 | 145 | 4834 | 42 650 |
| 0,3 | 97 | 3222 | 28 433 |
| 0,4 | 73 | 2417 | 21 325 |
| 0,5 | 58 | 1933 | 17 043 |
| 0,6 | 48 | 1611 | 14 217 |
| 0,7 | 41 | 1381 | 12 186 |
| 0,8 | 37 | 1208 | 10 663 |
| 0,9 | 32 | 1074 | 9 478 |
| 1,0 | 29 | 967 | 8 530 |

Die Vertikalspalten geben das Maximum der anwendbaren Gesamtvergrößerung v des Fernrohres für eine bestimmte Öffnung und Zenitdistanz an.

Aus Tabelle I bis IV läßt sich unter Zuhilfenahme der Gl. (14) der astigmatische Bildfehler für jedes astronomische Fernrohr entnehmen, unter der Voraussetzung, daß das Instrument selbst anastigmatisch sei.

## Nachweis der benutzten Werke.

Gleichen, Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre.

Bruhns, Die astronomische Strahlenbrechung, Leipzig 1861.

Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik, Leipzig 1902.

Gleichen, Theorie der modernen optischen Instrumente, Stuttgart 1911.

## Vita.

Ich bin am 24. August 1885 zu Berlin geboren und habe daselbst das Berlinische Gymnasium zum Grauen Kloster besucht, das ich zu Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um an der Berliner Universität Mathematik, Physik, Chemie, Philosophie und Kunstgeschichte zu studieren. Ich habe Kollegs gehört bei den Herren Claisen, Delmer, Fleischer, Frey, Friedländer, Frobenius, Hettner, Kekulé von Stradonitz †, Knoblauch, Landau, Landolt †, Lehmann-Filhés, Loeb, Marckwald, R. I. Meyer, Nernst, Paulsen †, Riehl, Schur, Schwarz, Simmel, Slaby, Starke, Stumpf, van t'Hoff †, v. Wilamowitz-Moellendorf. Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Regierungsrat Dr. Alexander Gleichen, dem für seinen bewährten Rat auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank abzustatten, mir eine angenehme Pflicht ist.